XXX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Региональный этап. Задания и решения

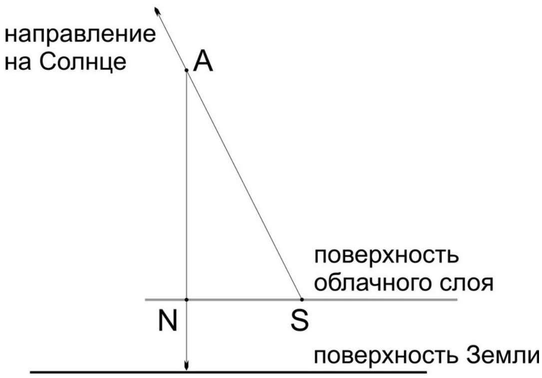
9 класс

1. Условие. Самолёт летит на высоте 10400 м. В местный полдень 21 июня самолёт пересёк параллель +50°. В это время под ним оказался плотный ровный слой облаков с высотой 2800 м и ниже. На каком расстоянии (линейном) от проекции надира на облаках будет видна тень самолета? В каком направлении (север, юг, запад, восток) относительно точки надира на облаках она будет находиться? Какова была угловая высота Солнца в этот момент? *(А. М. Татарников)*

1. Решение. Ответим сначала на последний вопрос задачи. 21 июня склонение Солнца равно $\delta = 23.4°$, и его высоту в полдень (это момент верхней кульминации) легко найти по формуле:

$$h = 90° - \varphi + \delta = 63.4°.$$

Итак, угловая высота Солнца в рассматриваемый момент времени составляла 63.4°. Теперь мы можем ответить на первый вопрос задачи. Нарисуем прямоугольный треугольник с вершинами в самолёте (A), его тени (S) и точки надира на облачном слое (N).



Один из катетов этого треугольника равен AN = 10400 – 2800 = 7600 м, а второй катет (NS) является искомой величиной. Угол $\angle NSA$ – это угол между горизонтом и направлением на Солнце. Он равен угловой высоте Солнца над горизонтом: $\angle NSA = h = 63.4°$. Соответственно, угол «при самолёте» равен $\angle NAS = 90° - 63.4° = 26.6°$. Отсюда расстояние от тени до точки надира равно $NS = 7600 \operatorname{tg} 26.6° \approx 3800$ м.

В средних широтах Северного полушария Земли Солнце в полдень находится к югу от отвесной линии. Поэтому тень будет находиться к северу от отвесной линии и, соответственно, точки надира на облаках.

Ответ: 1) примерно 3800 м; 2) к северу; 3) 63.4°.

1. Система оценивания.

Этап 1. (1 балл): Понимание картины происходящего, выраженное рисунком или верным ходом решения.

Этап 2. (1 балл): Запись формулы высоты в верхней кульминации.

Этап 3. (2 балла): Вычисление угловой высоты Солнца с ответом в диапазоне [63°; 64°]. За верный ответ без формулы или вычислений ставится 1 балл.

Этап 4. (1 балл): Вычисление высоты самолёта над облачным слоем.

Этап 5. (1 балл): Определение направления, в котором расположена тень относительно точки надира.

Этап 6. (2 балла): Определение искомого расстояния.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

2. Условие. На поверхности Солнца появилось стационарное экваториальное пятно. Для его изучения был запущен на орбиту вокруг Солнца космический аппарат так, чтобы он находился постоянно над этим пятном. В силу конструкции аппарата передавать данные он может только в противоположную от точки наблюдения сторону, а угол поля зрения (диаграмма направленности) антенны составляет θ = 3°. С каким промежутком времени и как долго на Земле можно будет принимать сигнал от этого спутника? Орбиты аппарата и Земли считать круговыми. Плоскость орбиты Земли считать совпадающей с плоскостью экватора Солнца и плоскостью орбиты аппарата. Период осевого вращения Солнца составляет 24.47 суток. *(М. В. Кузнецов)*

2. Решение. Экваториальный период обращения Солнца составляет 24.47 суток. Следовательно, ровно с таким же периодом должен делать оборот вокруг Солнца аппарат. Для наступления момента, благоприятного для связи, необходимо нахождение на одной прямой Солнца, аппарата и Земли. Эта конфигурация для Земли будет соответствовать нижнему соединению аппарата с Солнцем. Время между двумя последовательными нижними кульминациями аппарата равно его синодическому периоду. Найдём его:

$$\frac{1}{S_A}=\frac{1}{T_A}-\frac{1}{T_\oplus},$$

$$S_A=\frac{T_A T_\oplus}{T_\oplus - T_A}=\frac{365.2564\cdot 24.47}{365.2564-24.47}=26.23\,\text{суток}.$$

Здесь T_A – экваториальный период обращения Солнца, а $T_\oplus$ – сидерический период Земли. Теперь определим ту часть орбиты, которая будет благоприятна для связи аппарата с Землей. Для этого необходимо определить радиус орбиты аппарата, для чего воспользуемся третьим законом Кеплера:

$$\frac{T_A^2}{T_\oplus^2}=\frac{a_A^3}{a_\oplus^3},$$

где $a_\oplus$ – радиус орбиты Земли. Выразим расстояние от аппарата до Солнца:

$$a_A=a_\oplus\left(\frac{T_A}{T_\oplus}\right)^{\frac{2}{3}}=1.5\cdot 10^8\left(\frac{24.47}{365.2564}\right)^{\frac{2}{3}}\approx 24.7\,\text{млн. км}.$$

Воспользуемся системой координат, в которой Солнце и аппарат неподвижны, а Земля движется вокруг Солнца с периодом S_A. Проходя через диаграмму направленности антенны θ, Земля поворачивается на угол α < θ вокруг Солнца (см. рисунок). Пусть l – дуга земной орбиты, облучаемая антенной. В силу малости угла α можно принять, что расстояние от аппарата до Земли во время передачи не меняется и равно $a_\oplus - a_A$. Тогда можно записать два соотношения:

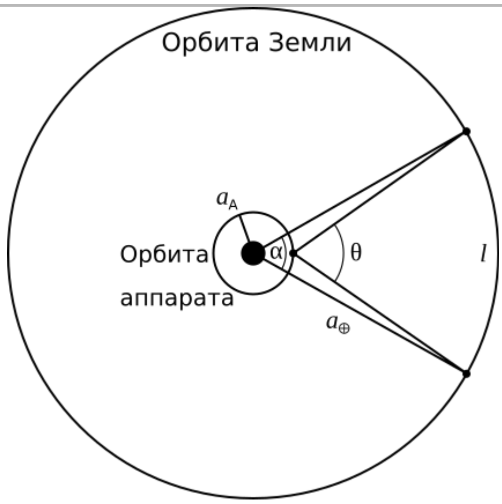
$$\frac{l}{a_\oplus}=\frac{\alpha^\circ}{57.3^\circ},\qquad \frac{l}{a_\oplus - a_A}=\frac{\theta^\circ}{57.3^\circ}.$$

Исключим l из уравнений, поделив первое на второе:

$$\frac{a_\oplus - a_A}{a_\oplus}=\frac{\alpha^\circ}{\theta^\circ},$$

откуда

$$\alpha^\circ=\theta^\circ\frac{a_\oplus - a_A}{a_\oplus}=3^\circ\cdot\frac{150\cdot 10^6-24.7\cdot 10^6}{150\cdot 10^6}\approx 2.5^\circ.$$



Следовательно, время приёма сигнала с аппарата на Земле составит долю от полного синодического периода:

$$\tau = S_A \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = 26.23 \frac{2.5^\circ}{360^\circ} = 0.18 \text{ суток} \approx 4.4 \text{ часа.}$$

Ответ: 1) S_A = 26.23 сут. 2) τ = 4.4 ч.

2. Система оценивания.

Этап 1. (3 балла): Нахождение интервала между периодами связи, как синодического периода спутника.

Возможная ошибка – период обращения аппарата вокруг Солнца взят равным периоду вращения Солнца 24.47 суток, что даёт время приёма 0.17 суток или 4.08 часа. В этом случае пункт оценивается в 1 балл. Такая же оценка ставится в случае предположения противоположности обращения аппарата и Земли.

Этап 2. (4 балла): Определение угла видимости из центра Солнца.

Возможно точное вычисление угла с использованием теоремы синусов, что оценивается в полной мере. Если угол по умолчанию берётся равный диаграмме направленности антенны, то мы получаем время приёма 0.22 суток или 5.2 часа. В этом случае этап оценивается из 1 балла, дальнейшие пункты оцениваются в полной мере.

Этап 3. (1 балл): Нахождение времени приёма сигнала.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

3. Условие. В момент наибольшей восточной квадратуры для земного наблюдателя лучевая скорость астероида составила +20 км/с. Определите радиус орбиты астероида, считая её круговой и лежащей в плоскости эклиптики. Направления вращения Земли и астероида совпадают. *(А. В. Веселова)*

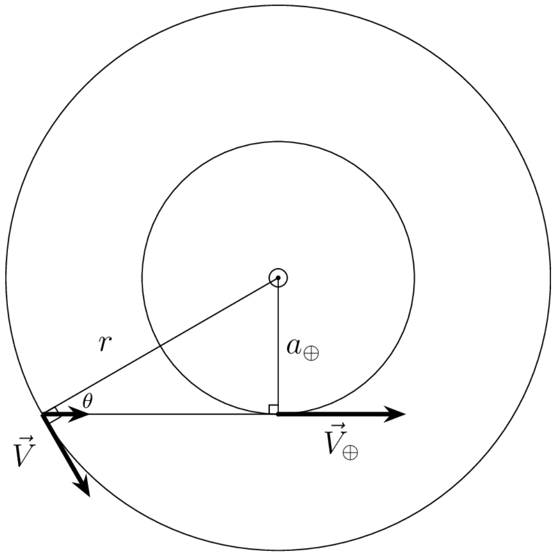
3. Решение. Лучевая скорость астероида положительна, то есть для земного наблюдателя астероид удаляется от Земли. Для определения лучевой скорости астероида V_r следует учесть проекции на луч зрения скорости как астероида V, так и наблюдателя, то есть скорость Земли $V_\oplus$. В момент квадратуры полная скорость Земли направлена вдоль луча зрения, от скорости астероида необходимо взять компоненту вдоль луча зрения:

$$V_\mathrm{r}=V_\oplus-V\cos(90°-\theta)=V_\oplus-V\sin\theta\,.$$

Здесь θ – угол при астероиде между направлением на Солнце и на Землю. Из рисунка

$$\sin\theta=\frac{a_\oplus}{r}\,,$$

где r и $a_\oplus$ – радиусы орбиты астероида и Земли соответственно.



Также заметим, что на круговой орбите скорость обратно пропорциональна квадратному корню из радиуса орбиты:

$$V=\sqrt{\frac{GM_\odot}{r}},\qquad V=V_\oplus\cdot\sqrt{\frac{a_\oplus}{r}}.$$

Подстановка этих выражений в выражение для лучевой скорости даёт соотношение

$$V_\mathrm{r}=V_\oplus-V_\oplus\cdot\sqrt{\frac{a_\oplus}{r}}\cdot\frac{a_\oplus}{r}=V_\oplus\cdot\left(1-\left(\frac{a_\oplus}{r}\right)^{3/2}\right).$$

Обозначим $\kappa=\sqrt{a_\oplus/r}$, тогда уравнение для лучевой скорости примет вид

$$\frac{V_\mathrm{r}}{V_\oplus}=1-\kappa^3.$$

Отсюда находим величину κ:

$$\kappa=\sqrt[3]{1-\frac{V_\mathrm{r}}{V_\oplus}}=\sqrt[3]{1-\frac{20}{30}}=0.69.$$

Следовательно, $r = a_\oplus / \kappa^2$ =2.1 а.е.

3. Система оценивания.

Этап 1. (4 балла): Запись выражения для лучевой скорости с учётом скорости движения Земли. Возможная ошибка: учёт только скорости астероида, считая Землю неподвижной. При правильных вычислениях это дает ответ 1.3 а.е. В этом случае за данный этап выставляется только 1 балл, остальные пункты оцениваются из полного балла. Участник может также ошибиться в направлении лучевой скорости (приближение или удаление), а также в направлении квадратуры (западная или восточная). Численно эти ошибки могут компенсировать друг друга, однако оценка за этап снижается на 2 балла.

Этап 2. (2 балла): Связь скорости астероида и радиуса орбиты. Соотношение может быть выведено или записано без вывода.

Этап 3. (2 балла): Запись уравнения для радиуса орбиты (1 балл), решение уравнения и получение итогового ответа (1 балл).

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

4. Условие. Обнаружена планетная система у звезды радиусом $R = 2R_\odot$, которая имеет три планеты, расположенные близко к родительской звезде: горячий нептун и два горячих юпитера ($R_1 = 2R_ю$, $R_2 = 1.4R_ю$, $R_3 = 1.5R_н$). Найдите максимальное падение блеска в звёздных величинах этой системы для наблюдателя, находящегося достаточно далеко от системы в плоскости орбит планет этой системы. Потемнением диска звезды к краю пренебречь. $R_\odot$ – радиус Солнца, $R_ю$ – радиус Юпитера и $R_н$ – радиус Нептуна. *(А. А. Автаева)*

4. Решение. Максимальное падение блеска произойдёт в тот момент, когда все три планеты окажутся на диске звезды, но не будут перекрывать друг друга. Поток от звезды I пропорционален видимой площади звезды S, следовательно,

$$I_0 \sim S = \pi R^2, \qquad I \sim S - S_1 - S_2 - S_3,$$

где I_0 – поток от звезды вне минимумов блеска, $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$ и $S_3 = \pi R_3^2$. Поделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{I}{I_\odot} = \frac{R^2 - R_1^2 - R_2^2 - R_3^2}{R^2} = \frac{4R_\odot^2 - 4R_ю^2 - 1.96R_ю^2 - 2.25R_н^2}{4R_\odot^2} = 0.984\,.$$

Чтобы найти падение блеска в звёздных величинах, воспользуемся формулой Погсона:

$$\Delta m = -2.5\lg\frac{I}{I_\odot} = 0.018\,.$$

4. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Максимальное падение блеска, когда все три планеты окажутся на диске звезды (это может быть просто видно из решения).

Этап 2. (1 балл): Поток от звезды пропорционален площади.

Этап 3. (1 балл): Поток при максимальном падении блеска пропорционален $S_\odot - S_1 - S_2 - S_3$.

Этап 4. (1 балл): Нахождение $I / I_\odot = 0.984$ (может быть не посчитано численно, но иметь правильную формулу).

Этап 5. (1 балл): Правильная запись формулы Погсона для этой задачи.

Этап 6. (2 балла): Полученное падение блеска в звёздных величинах

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

5. Условие. В телескоп с диаметром 20 см и фокусным расстоянием 1000 мм фотографируют Марс в момент великого противостояния (расстояние между Марсом и Землей 0.38 а.е.) на ПЗС-матрицу с размером пикселя 5 мкм. Сколько пикселей занимает Марс? Сколько фотонов будет в каждом пикселе при выдержке 1/200 секунды?

Считайте, что от звезды нулевой звёздной величины приходит 10^6 фотонов за 1 секунду на 1 см^2. Звёздная величина Марса во время великих противостояний -2.9^m. *(В. Б. Игнатьев)*

5. Решение. На первом этапе задачи определим угловой размер Марса в противостоянии. Воспользуемся формулой углового размера:

$$\rho'' = \frac{206265 \cdot D}{r_0} = 24.6''.$$

Теперь определим линейный размер изображения Марса в фокальной плоскости

$$x = F \cdot \rho.$$

Здесь ρ – должно быть подставлено в радианах. Подставляем значения и получаем

$$x = F \cdot \rho = 1000\,\text{мм} \cdot \frac{24.6}{206265} = 0.1193\,\text{мм} = 119.3\,\text{мкм}.$$

Согласно условию, один пиксель имеет размер 5 мкм. Тогда линейный диаметр изображения Марса составит d = 119.3 / 5 ≈ 23.9 пикселя. Поскольку Марс в противостоянии, то его фаза равна 1, и на изображении будет виден весь диск Марса. Марс при этом займёт

$$N_{\text{px}} = \pi \cdot (d/2)^2 = 447\ \text{пикселей}.$$

К такому же ответу можно прийти, если сначала вычислить площадь изображения Марса в микрометрах, а затем разделить на площадь одного пикселя – 25 мкм^2.

Теперь определим число фотонов, пришедшее на 1 пиксель за время экспозиции. Марс во время великих противостояний имеет видимую звёздную величину -2.9^m. Определим количество фотонов, приходящих от Марса за время экспозиции:

$$N = N_0 \cdot \Delta t \cdot S \cdot 10^{-0.4(m - m_0)},$$

где Δt – это выдержка фотографии, показывающая, сколько времени открыт затвор. Количество фотонов линейно растёт с увеличением выдержки. S – площадь объектива телескопа, N_0 – число фотонов, приходящих от звезды 0^m, а множитель $10^{-0.4(m - m_0)}$ показывает, насколько больше освещённость от объекта, чем от звезды нулевой звёздной величины.

Будем использовать предположение, что все фотоны имеют одинаковую энергию. Тогда соотношение освещённостей равно отношению числа фотонов. Вычислим общее число фотонов, которые придут на ПЗС камеру:

$$N = 10^6 \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{\pi 20^2}{4} \cdot 10^{-0.4(-2.9-0)} = 22.7 \cdot 10^6.$$

Для определения числа фотонов в одном пикселе разделим общее число фотонов на число пикселей:

$$N_1 = \frac{22.7 \cdot 10^6}{447} = 50.8 \cdot 10^3.$$

Это и будет ответом на задачу.

Ответ: 1) 452; 2) около 50 тысяч.

5. Система оценивания.

Этап 1. (1 балл): Определение углового размера Марса.

Этап 2. (3 балла): Определение числа пикселей ПЗС, в которых будет изображение Марса. Первый балл ставится за определение линейного размера изображения через фокусное расстояние. Второй балл за масштаб изображения в пикселях. Третий балл за определение площади Марса в пикселях.

Если участник неверно нашел угловой размер Марса или перепутал радиус с диаметром, за Этап 2 он получает не более 1 балла, если получил диаметр изображения Марса правильно для своего значения углового размера.

Участник может считать целое число пикселей, освещаемых Марсом. Так диаметр Марса может попадать на 24, а может и на 25 пикселей. Это несколько меняет итоговый ответ, но ошибкой не является.

Этап 3. (3 балла): Определение общего числа фотонов. 1 балл ставится за правильное использование формулы Погсона (возможно с результатом, что Марс ярче звезды 0^m в 14.45 раза). Второй балл – за запись выражения для полного числа фотонов в общем виде. 3-й балл за корректный численный подсчёт. Возможно, что участник делает все вычисления в конце. Тогда этот балл выставляется только при правильном конечном ответе.

Этап 4. (1 балл): Определение числа фотонов, оказавшихся в одном пикселе. Данный балл выставляется только при правильном численном ответе в отсутствие ошибок на предыдущих этапах.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

6. Условие. В серии книг «Космоолухи» цивилизация нашла способ сильно сократить время перемещения по Вселенной. Космические корабли могут совершить прыжок в пространстве очень быстро на любое расстояние до 0.5 кпк. Главные герои занимаются грузоперевозками. В какой-то момент они стартуют с Земли и имеют заказы к планетам или астероидам около звезд: Алькор, Звезды Людвига и α Малой Медведицы. Они хотят пройти кратчайшим путем, завезя все заказы и вернувшись на родную планету, Новый Бойбруйск, до Нового Года. Постройте для них трассу (порядок звезд, в котором им надо лететь) и посчитайте длину этой трассы. Вам дана вырезка из навигационного атласа XXV века. *(А. А. Автаева)*

Звезда	**Прямое восхождение**	**Склонение**	**Параллакс**
Алькор	13ч 25м	+54° 59′	0.0399″
Звезда Людвига	13ч 25м	+54° 53′	0.0109″
α Малой Медведицы	02ч 31м	+90° 00′	0.0073″
Новый Бойбруйск	01ч 25м	+73° 00′	0.0050″

6. Решение. Найдём расстояния от Земли до всех этих объектов:

$$r\,(\text{пк}) = \frac{1}{\pi''},$$

где π – параллакс.

	Алькор	зв. Людвига	Полярная	НБ
Расстояние от Земли	25.06 пк	91.74 пк	137 пк	200 пк

Найдём угловое расстояние попарно между всеми звёздами, при наблюдении с Земли. Заметим, что у нас есть Полярная звезда (α Малой Медведицы), склонение которой дано как +90° 00′, а значит, её прямое восхождение значения не имеет, и угловое расстояние от неё до всех звёзд, это просто полярное расстояние. Также заметим, что Алькор и Звезда Людвига лежат на одном меридиане, также, как и Новый Бойбруйск (НБ). Тогда угловое расстояние между звёздами по одну сторону от полюса равно разности их склонений, и сумме полярных расстояний для звёзд по разную сторону от полюса. Итого:

Угол β	**Алькор**	**зв. Людвига**	**Полярная**	**НБ**
Алькор	0	00° 06′	35° 01′	52° 01′
зв. Людвига	00° 06′	0	35° 07′	52° 07′
Полярная	35° 01′	35° 07′	0	17° 00′
НБ	52° 01′	52° 07′	17° 00′	0

Нам известны расстояния до звёзд и угол между ними β. Воспользуемся теоремой косинусов, чтобы найти расстояние между звёздами:

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2\cdot r_1 r_2\cos\beta}.$$

Итого:

Взаимные расстояния	**Алькор**	**зв. Людвига**	**Полярная**	**НБ**
Земля	25.06 пк	91.74 пк	137 пк	200 пк
Алькор	0	66.68 пк	117.34 пк	185.63 пк
зв. Людвига	66.68 пк	0	81.38 пк	160.88 пк
Полярная	117.34 пк	81.38 пк	0	79.78 пк
НБ	185.63 пк	160.88 пк	79.78 пк	0

Все расстояния меньше 0.5 кпк, значит просто считаем минимальную трассу, не забывая, что Новый Бойбруйск должен оказаться в конце:

Старт	**Первая остановка**	**Вторая остановка**	**Третья остановка**	**Итоговая длинна пути до НБ, пк**
Земля	Алькор	зв. Людвига	Полярная	252.9
		Полярная	зв. Людвига	384.7
	зв. Людвига	Алькор	Полярная	355.5
		Полярная	Алькор	476.1
	Полярная	Алькор	зв. Людвига	481.9
		зв. Людвига	Алькор	470.7

Минимальная длина трассы составляет 252 пк (Земля – Алькор – звезда Людвига – Полярная – Новый Бойбруйск).

Решение задачи можно облегчить, аккуратно нарисовав чертеж. Тогда все расстояния между звездами можно просто измерить линейкой, а наикратчайшая трасса (выделена на рисунке) становится очевидной.

6. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Найдены расстояния от Земли до всех объектов (1 балл за формулу, 1 балл за вычисления).

Этап 2. (1 балл): Объяснение, что все звезды лежат в одной плоскости.

Этап 3. (2 балла): Нахождение всех попарных угловых расстояний.

Этап 4. (2 балла): Нахождение попарных расстояний между звездами (1 балл за формулу, 1 балл за вычисления).

Этап 5. (1 балл): Составить минимальную трассу.

Этап 6. (1 балл): Объяснение почему минимальная.

Этап 7. (1 балл): Вычисление длины трассы.

Правильное графическое решение также оценивается в 10 баллов.

Возможные ошибки:

- Ошибки вычислений обнуляют только тот пункт, в котором они были сделаны, если ошибки не влияют на смену трассы.
- Если ошибки вычислений приводят к смене трассы, то пункты 5, 6 не оцениваются, а итоговая оценка не превышает 7 баллов.
- Если забывают, что переход до Нового Бойбруйска тоже считается, то за пункты 5 и 7 ставится 0 баллов (в итоге за задачу не более 8 баллов)
- Если Новый Бойбруйск не является последней точкой маршрута, то пункты 5, 6 и 7 не оцениваются, а за задачу выставляется не более 7 баллов.

Максимальная оценка за задачу – 10 баллов.

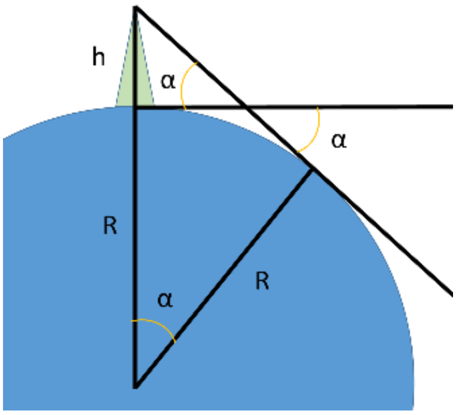
XXX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Региональный этап. Задания и решения

10 класс

1. Условие. В романе «Таинственный остров» путешественники, чтобы удостовериться, что они на острове, взобрались на одиночную высокую гору. Находясь на самой вершине, инженер Сайрус Смит заметил, что на закате, когда диск Солнца коснулся горизонта, подножие горы как раз скрылось в тени. Найдите из этих данных высоту горы. Рефракцию не учитывать. Решение сопроводите чертежом. *(А. А. Автаева)*

1. Решение. Поскольку подножие горы только скрылось за горизонтом, можно считать, что для наблюдателя у подножия верхняя часть диска Солнца касается горизонта. Изобразим на рисунке Землю радиуса *R*, гору высоты *h*. Угол между направлениями на горизонт обозначим α. Этот угол равен угловому диаметру Солнца.



Угол при основании горы прямой, поэтому

$$\cos\alpha = R / (R + h),$$

Угловой диаметр Солнца есть отношение его пространственного диаметра к расстоянию до Солнца. В угловой мере он составляет α = 32′. Высота горы есть

$$h = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = 6371\,\text{км} \cdot \left(\frac{1}{\cos 32'} - 1\right) = 276\,\text{м}.$$

1. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Правильный рисунок.

Этап 2. (1 балл): Угол α равен угловому размеру Солнца (может быть показано на рисунке).

Этап 3. (1 балл): Взят или посчитан правильный угловой размер Солнца (от 30′ до 32′).

Этап 4. (2 балла): Правильная формула для расчёта высоты горы.

Этап 5. (2 балла): Правильный расчёт для высоты горы (от 230 м до 280 м) при правильной формуле. Этап не засчитывается если правильный ответ получен по неправильно формуле или решение отсутствует.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

2. Условие. Координаты звезды $\alpha_0 = 6^h\,40^m$, $\delta_0 = 23.5°$. Расстояние до звезды $r_0 = 20$ пк. У звезды имеется собственное движение $\mu_\alpha = 0''$/год и $\mu_\delta = 0.74''$/год. Лучевая скорость звезды $v_r = -39$ км/с. Определите:

- Координаты звезды, когда она удалится от нас на бесконечность
- Время, за которое звезда окажется в текущем полюсе мира
- Координаты звезды в момент минимального сближения

Прецессию земной оси и движение звезд внутри галактики не учитывать. *(В. Б. Игнатьев)*

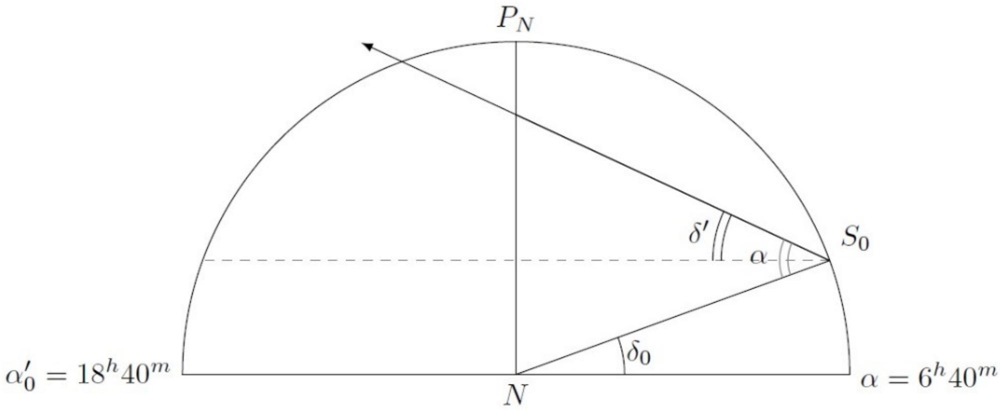
2. Решение. Ответим сначала на первый вопрос задачи. Из условия задачи можем определить трансверсальную скорость звезды в картинной плоскости.

$$v_\tau = 4.74\frac{\mu}{\pi} = 4.74\,\mu \cdot r_0 = 70.2\text{ км/с}.$$

Определим угол между направлением движения звезды и направлением на наблюдателя. Этот угол можно определить из треугольника скоростей, так как это угол между лучевой скоростью и полной скоростью.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\tau}{v_r}$$

Отсюда $\alpha = 60.9°$.



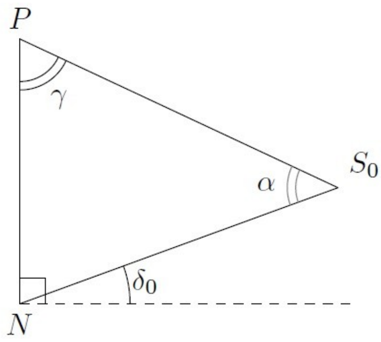
Направление скорости звезды образует угол $\delta' = \alpha - \delta_0 = 60.9° - 23.5° = 37.4°$ с плоскостью небесного экватора. Следовательно, именно этот угол и будет являться новым склонением:

$$\alpha_{new} = 18^h\,40^m, \quad \delta_{new} = 37.4°.$$

Перейдем ко второму вопросу. Поскольку движение звезды происходит строго по склонению, то в какой-то момент она окажется в точке текущего полюса мира (P). Для этого звезда по небу должна переместиться на угол, равный полярному расстоянию звезды: $90° - \delta_0 = 66.5°$. Рассмотрим треугольник PNS_0: в нем мы знаем сторону $NS_0 = r_0$ и два угла. Определим из геометрических соображений сторону PS_0, равную $r = v_F \cdot t$, где v_F – полная скорость звезды.

Из теоремы синусов следует:

$$\frac{r}{\sin(90-\delta_0)} = \frac{r_0}{\sin\gamma}.$$



Выражаем r:

$$r = r_0 \frac{\sin(90 - \delta_0)}{\sin\gamma} = r_0 \frac{\cos\delta_0}{\sin(180 - 90 + \delta_0 - \alpha)} = 23.1\,\text{пк}.$$

Для определения искомого времени, необходимо найти полную пространственную скорость звезды

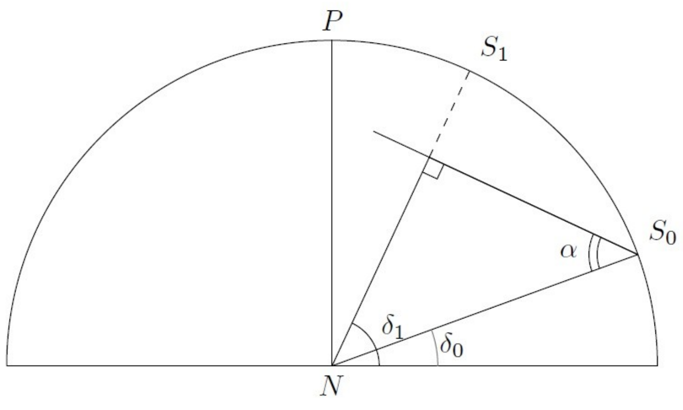
$$v_F = \sqrt{v_r^2 + v_\tau^2} = 80.3\,\text{км/с}.$$

Отсюда время, через которое звезда окажется в точке текущего полюса мира

$$t = r / v_F = 280000\,\text{лет}.$$

Это является ответом на второй вопрос задачи.

Осталось ответить на третий вопрос. Определим координаты звезды в момент максимального сближения звезды с Солнцем. Как следует из рисунка, минимальное сближение произойдет до того, как звезда окажется в полюсе.



Прямое восхождение звезды не меняется, так как нет компоненты собственного движения μ_α, а эффекты связанные с прецессией мы не учитываем по условию задачи. Склонение звезды увеличится на угол $90° - \alpha = 29.1°$ и составит $\delta_1 = 23.5° + 29.1° = 52.6°$. Это вновь подтверждает, что звезда не успеет перейти на другую сторону от текущего полюса мира, поэтому $\alpha_1 = 6^h 40^m$.

Ответ: 1) $\alpha_{new} = 18^h 40^m$, $\delta_{new} = 37.4°$, 2) t = 280000 лет, 3) $\alpha_1 = 6^h 40^m$, $\delta_1 = 52.6°$.

2. Система оценивания.

Этап 1. (5 баллов): Определение координат звезды после пролета мимо Солнца и удаления на бесконечность. Первый балл ставится за определение трансверсальной скорости и угла между направлением движения звезды и лучом зрения. Два балла ставится за модель, в которой ищется угол между направлением движения и небесным экватором. При этом подразумевая, что все движение происходит по большому кругу с α_0 = 6^h 40^m и α_{new} = 18^h 40^m, а также содержащий текущий полюс мира. За правильное определение координат по 1 баллу.

Возможная ошибка. Прямое восхождение звезды не изменилось и осталось равным α_0. В этом случае за модель ставится 1 балл, а общая оценка за этап 1 не превосходит 3 баллов. На последующие этапы эта ошибка не влияет. Второй и третий этапы оцениваются независимо от реализации первого этапа.

Возможная ошибка. Небесная сфера считается сферой конечного радиуса. Участник ищет точку пересечения пути звезды с небесной сферой и из этих соображений находит новое склонение. В данном случае первый этап может оцениваться максимум в 1 балл, если верно определена трансверсальная скорость.

Возможная ошибка. Участник путает направление лучевой скорости: в его модели звезда удаляется от Солнца. Тогда он не получает баллы за «модель», и максимальная оценка за этап становится 3 балла при правильном определении координат: α_{new} = 6^h 40^m, δ_{new} = 84.4°. Этап 2 при таком решении оценивается в 0 баллов, а этап 3 – в 1 балл при правильном определении обеих координат: α_1 = 6^h 40^m, δ_1 = −5.6°.

Этап 2. (2 балла): Определение времени, через которое звезда окажется в точке текущего полюса мира. Первый балл ставится за определение полной пространственной скорости звезды. Второй балл за получение итогового ответа в диапазоне от 275000 до 286000.

Этап 3. (1 балл): Определение координат звезды в момент максимального сближения. Он ставится за верное нахождение обеих координат.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

3. Условие. Про одно из самых ярких шаровых скоплений NGC 104 или 47 Тукана сказано следующее: «Центральная часть (ядро) шарового звездного скопления имеет светимость, равную $10^{4.88} \cdot L_\odot$ ($L_\odot$ – светимость Солнца) на кубический парсек и угловой радиус центральной части скопления 0.36′.» Определите видимую звездную величину ядра шарового скопления, если расстояние до него r_0 = 4.5 кпк. Межзвездным поглощением пренебречь. *(В. Б. Игнатьев)*

3. Решение. Из известного расстояния до шарового скопления и углового радиуса ядра скопления можно найти линейный размер ядра:

$$\rho'' = \frac{206265 \cdot R}{r_0}, \qquad R = \frac{r_0 \cdot \rho''}{260265} = 0.47\,\text{пк.}$$

Нам известна светимость ядра шарового скопления на кубический парсек. Если известен радиус ядра, то зная его объем можно получить полную светимость ядра.

$$L = 10^{4.88} L_\odot \frac{4\pi}{3} R^3 \approx 33000\, L_\odot\,.$$

Выразим абсолютную звездную величину ядра скопления, сравнив его с Солнцем:

$$M_\Sigma - M_0 = -2.5\lg\frac{L}{L_\odot},$$

$$M_\Sigma = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{L}{L_\odot}\right) = 4.7 - 2{,}5\lg 33000 = -6.6^{\mathrm{m}}.$$

На последнем этапе решения задачи определим видимую звездную величину без учета межзвездного поглощения.

$$M - m = 5 - 5\lg r_0$$

$$m = M + 5\lg r_0 - 5 = -6.6^{\mathrm{m}} + 5\lg 4500 - 5 = 6.7^{\mathrm{m}}.$$

3. Система оценивания

Этап 1. (2 балла): Определение линейного размера ядра шарового скопления. Первый балл ставится за правильное написание формулы для углового размера и подстановку в нее числовых данных. Второй балл – за верное численное значение размера ядра шарового звездного скопления. Формула без проведения с ее помощью вычислений не оценивается.

Этап 2. (2 балла): Определение суммарной светимости ядра. Первый балл дается участнику за правильное использование формулы объема шара и нахождения объема ядра ШЗС (непосредственно в виде числа или внутри формулы для светимости, как в представленном решении). Второй балл – за нахождение светимости ядра скопления в виде формулы или числа.

<u>Возможная ошибка.</u> Участник перепутал диаметр и радиус. Тогда объем ядра будет отличаться в 8 раз, а итоговая звездная величина на 2.25^{m}. В этом случае второй этап оценивается в 0 баллов, а третий и четвертый – полностью, если участник получает правильные числовые ответы для его модели. Если в последующих этапах решения задачи участник также совершил ошибку, то они расцениваются независимо, согласно системе оценивания следующих этапов.

Этап 3. (2 балла): Определение абсолютной звездной величины для ядра скопления. Первый балл участник получает за использование формулы Погсона для светимостей и абсолютных звездных величин. Участник может написать эту формулу сразу или получить из формулы Погсона для освещенностей. Второй балл дается участнику за получение численного значения абсолютной звездной величины с точностью до 0.15^{m}. Если участник не попадает в указанные ворота значений абсолютной звездной величины, второй балл за этот пункт не ставится.

Участники могут объединить этот этап с последующим без вычисления промежуточных результатов. Такие решения оцениваются в полной мере, однако, при неправильном итоговом ответе не выставляется 2 балла.

Этап 4. (2 балла): Определение видимой звездной величины для ядра скопления. Первый балл участник получает за использование связи между видимой и абсолютной звездной величиной без учета поглощения. Второй балл за правильный числовой ответ с точностью до 0.15^{m}.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

4. Условие. Околоземный спутник массой 99.9 кг двигался по высокой круговой орбите. В некоторый момент времени он испытал лобовое соударение с обломком космического мусора массой 0.1 кг, двигавшимся в том же направлении с вдвое меньшей скоростью, после чего продолжил движение с застрявшим обломком. Чему в % от радиуса первоначальной орбиты равна разность высот перицентра и апоцентра новой орбиты спутника? *(А. В. Веселова)*

4. Решение. Запишем закон сохранения импульса для ситуации до и после соударения:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V, \quad 99.9 V_1 + 0.1 \cdot 0.5 V_1 = 100 V, \quad V = 0.9995 V_1.$$

Скорость спутника уменьшилась на долю κ = 0.0005. Пусть R – радиус первоначальной орбиты спутника, V_1 – круговая скорость на этой орбите. Тогда круговую скорость можно выразить через радиус орбиты и массу Земли как

$$V_1^2 = \frac{GM_\oplus}{R}.$$

Определим большую полуось новой орбиты спутника. Для этого запишем интеграл энергий, учтя, что скорость спутника изменилась на долю κ:

$$(1-\kappa)^2 V_1^2 = GM_\oplus \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right).$$

Подставив значение V_1^2, получим

$$(1-\kappa)^2 = 2 - \frac{R}{a}, \quad 1 - 2\kappa + \kappa^2 = 2 - \frac{R}{a}, \quad a = \frac{R}{1 + 2\kappa - \kappa^2}.$$

Эксцентриситет новой орбиты определим из условия для апоцентра орбиты: в точке столкновения с обломком мусора скорость спутника была перпендикулярна радиус-вектору. Следовательно, эта точка является апоцентром или перицентром новой орбиты. Поскольку космический аппарат замедлился, то точка соударения является точкой апоцентра орбиты. Тогда выполняется соотношение

$$R = a(1+e), \quad e = \frac{R}{a} - 1 = 1 + 2\kappa - \kappa^2 - 1 = 2\kappa - \kappa^2.$$

Высоты в перицентре и апоцентре новой орбиты равны

$$H_\alpha = a(1+e) - R_\oplus, \; H_\pi = a(1-e) - R_\oplus.$$

Следовательно, разность высот равна

$$\Delta H = 2ae = 2 \cdot \frac{R}{1 + 2\kappa - \kappa^2} \cdot (2\kappa - \kappa^2).$$

Пересчет в проценты от радиуса исходной орбиты дает выражение

$$\frac{\Delta H}{R} \cdot 100\% = \frac{4\kappa - 2\kappa^2}{1 + 2\kappa - \kappa^2} \cdot 100\%.$$

В нашем случае κ = 0.0005 = 0.05%, что дает итоговое значение 0.2%. Заметим, что при малых κ слагаемыми с κ^2 можно пренебречь, в том числе и в промежуточных формулах, что при точности данных в условиях не скажется на точности получаемого ответа.

4. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): запись закона сохранения импульса (1 балл), оценка новой скорости спутника или указание изменения скорости в процентах или долях единицы (1 балл).

Этап 2. (4 балла): определение параметров новой орбиты: большой полуоси (2 балла) и эксцентриситета (2 балла). Заметим, что на этом этапе допустимо пренебрегать квадратичными слагаемыми от κ. Участники могут сразу подставлять числовые коэффициенты для изменяющихся величин и получить, например, изменение радиуса орбиты; вывод общей формулы, как в авторском решении, необязателен. Этап можно выполнять несколько по-иному, воспользовавшись формулой для скорости тела в перицентре (2 балла), а потом искать эксцентриситет (2 балла), что также верно.

Этап 3. (2 балла): запись выражений для высот перицентра и апоцентра, получение разности высот (1 балл), получение итогового ответа в процентах (1 балл).

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

5. Условие. 26 сентября 2022 года Юпитер оказался в «великом» (ближайшем к Солнцу и Земле) противостоянии и подошел к Земле на рекордно малое расстояние за последние 59 лет – 591.3 млн км. Это уникальный шанс для получения наиболее детальных фотографий атмосферы планеты. Астроном-любитель решил снять планету с помощью телескопа с диаметром объектива $D_\text{Т}$ = 150 мм и относительным отверстием, равным 1:5, используя трехкратную линзу Барлоу (ЛБ, увеличивающую эффективное фокусное расстояние в 3 раза) и астрокамеру с размером пикселя матрицы 2.4×2.4 мкм. Считать, что Юпитер обращается вокруг Солнца в плоскости эклиптики.

Определите:

а) масштаб (в угловых секундах на пиксель) и предел разрешающей способности оптической системы «телескоп-камера» (для длины волны λ = 555 нм. Следует полагать, что величина атмосферных искажений во время наблюдения не меньше 1.5″;

б) максимальную допустимую выдержку для одного кадра видеоролика, на котором еще не будет размытия изображения планеты в результате суточного движения Земли (при неподвижной трубе телескопа);

в) оптимальные размеры одного кадра для съемки Юпитера с использованием ЛБ из возможных форматов (1936×1096, 1280×960, 640×480, 968×548, 320×240 пикселей), с целью минимизации размера файла;

г) максимальную продолжительность видеоролика, из кадров которого еще можно собрать изображение планеты без размытия деталей, обусловленного суточным вращением Юпитера. Следует полагать, что съемка видеоролика осуществляется в режиме точного ведения трубы телескопа на роботизированной монтировке за Юпитером, компенсирующего суточное вращение Земли. *(Ю. П. Филиппов)*

5. Решение.

1. Прежде всего, определим разрешающую способность объектива телескопа на указанной длине волны, обусловленную явлением дифракции:

$$\beta_{\text{Т}} = 1.22 \frac{\lambda}{D_{\text{Т}}} \times 206265'' = 0.93''.$$

Согласно условию, атмосферные искажения во время наблюдения не меньше 1.5″, что больше $\beta_{\text{Т}}$. Значит, разрешающая способность объектива будет определяться именно состоянием атмосферы, а не дифракцией. Поскольку была использована трехкратная линза Барлоу, то эффективное фокусное расстояние объектива будет

$$F_{\text{эфф}} = k \times F_{\text{Об}} = k \times \frac{D_{\text{Т}}}{\chi} = 2250 \text{ мм},$$

здесь k = 3 – кратность линзы Барлоу, χ = 1:5 – относительное отверстие телескопа. Тогда на матрице астрокамеры угол в 1.5″ отобразится отрезком, длина которого

$$l = \frac{1.5''}{206265''} \times F_{\text{эфф}} = 16.4 \text{ мкм} = 6.83 \cdot a_0,$$

где a_0 = 2.4 мкм – линейный размер одного пикселя. Следовательно, искомый масштаб изображения данной оптической системы «телескоп-камера» есть

$$\beta_{\text{ОС}} = \frac{1.5''}{6.83 \text{ пикселя}} = 0.22''/\text{пиксель}.$$

Отметим, что масштаб одного пикселя существенно меньше других факторов, ограничивающих разрешение (атмосфера и дифракция) и тем самым на разрешающую способность системы не влияет.

2. Очевидно, размытие изображения Юпитера возможно, если в результате суточного вращения Земли произойдёт смещение лимба и деталей атмосферы Юпитера на угол, не меньший 1.5″. Поскольку противостояние Юпитера было великим, то его геоцентрическое расстояние должно минимальным среди прочих противостояний планеты-гиганта, что достигается в случае, когда последняя лежит в плоскости эклиптики. Кроме того, противостояние Юпитера произошло вблизи дня осеннего равноденствия, то, очевидно, Юпитер располагался в малой окрестности данной точки, значит, его склонение было близко к нулю. Тогда угловая скорость видимого движения Юпитера по небосводу будет равна угловой скорости суточного вращения Земли – $\omega_\oplus$ = 15″/с. Значит, максимально допустимая выдержка для одного кадра видеоролика при неподвижной трубе телескопа будет

$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{1.5''}{\omega_\oplus} = \frac{1}{10} \text{ с}.$$

3. Для определения оптимального размера одного кадра при съемке Юпитера с использованием ЛБ, прежде всего, вычислим угловой экваториальный диаметр Юпитера в эти сутки:

$$D_{\text{J}}'' = \frac{2R_{\text{J}}}{\Delta_{\text{J}}} \times 206265'' = 49.9'',$$

здесь R_{J} – экваториальный радиус Юпитера, Δ_{J} – его геоцентрическое расстояние на момент противостояния. Тогда линейный экваториальный диаметр диска Юпитера на матрице астрокамеры во время съемки (в пикселях) есть

$$d_{\text{J}} = D_{\text{J}}'' \times \frac{6.83 \text{ пикселей}}{1.5''} = 227 \text{ пикселей}.$$

Очевидно, это максимально возможный линейный размер диска планеты на матрице. Следовательно, с целью минимизации размера видеоролика подойдет кадр с размерами 320×240 пикселей.

4. Чтобы не было смаза деталей атмосферы планеты, обусловленного суточным вращением Юпитера, необходимо, чтобы самые быстрые точки поверхности Юпитера относительно астронома-любителя сместились за искомый промежуток времени не более чем на 1.5″, что соответствует линейному размеру на поверхности планеты, равному

$$L_J = \frac{1.5''}{206265''} \times \Delta_J = 4300\,\text{км}.$$

Самыми быстрыми точками поверхности Юпитера являются точки экватора планеты, проходящие в момент съемки через ее центральный меридиан. Их скорость перпендикулярна лучу зрения и равна

$$V_J = \frac{2\pi \cdot R_J}{T_J} = 12.57\,\text{км/с}.$$

В итоге, искомая максимальная продолжительность видеоролика будет

$$\tau_{\max}^{(\text{вр})} = \frac{L_J}{V_J} = 342\,\text{с} = 5.70\,\text{мин}.$$

5. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Разрешающая способность оптической системы «телескоп-камера». Участник может считать ее равной максимальному из всех факторов (атмосферные искажения, дифракция, размер пикселя), и тогда основным фактором должна быть атмосфера. Можно также сложить два близких по величине фактора (атмосфера и дифракция) по теореме Пифагора, получив в результате 1.8″. Этот подход считается также верным, он изменит часть последующих численных результатов, что не приводит к изменению оценки. А вот прямое сложение двух факторов с результатом 2.4″ или 2.6″ (если еще и учтены размеры пикселя) считается ошибочным, за этап выставляется 1 балл, остальные этапы, с учетом изменения численных ответов, оцениваются в полной мере.

Этап 2. (1 балл): вычисление масштаба изображения.

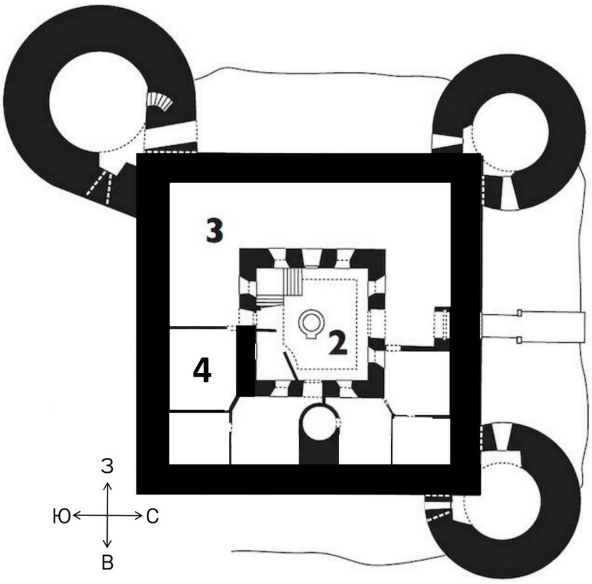
Этап 3. (1 балл): Максимальная допустимая выдержка для одного кадра видеоролика при неподвижной трубе телескопа.

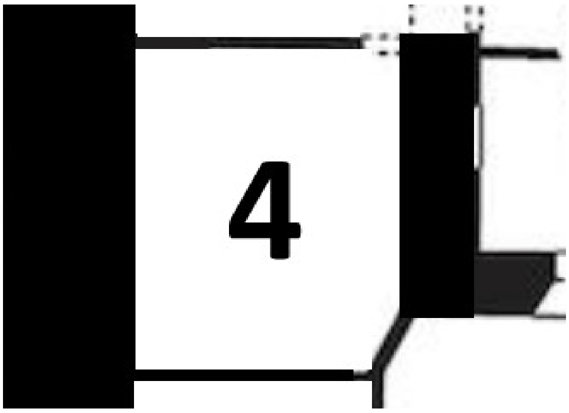
Этап 4. (2 балла): Определение оптимальных размеров одного кадра из предложенных для съемки Юпитера. 1 балл выставляется за правильное вычисление угловых размеров Юпитера, еще 1 балл – за определение размеров кадра.

Этап 5. (2 балла): Максимальная продолжительность видеоролика, из кадров которого еще можно собрать изображение планеты без размытия деталей, обусловленного суточным вращением Юпитера. Первый из 2 баллов выставляется за вычисление линейной скорости вращения Юпитера на экваторе.

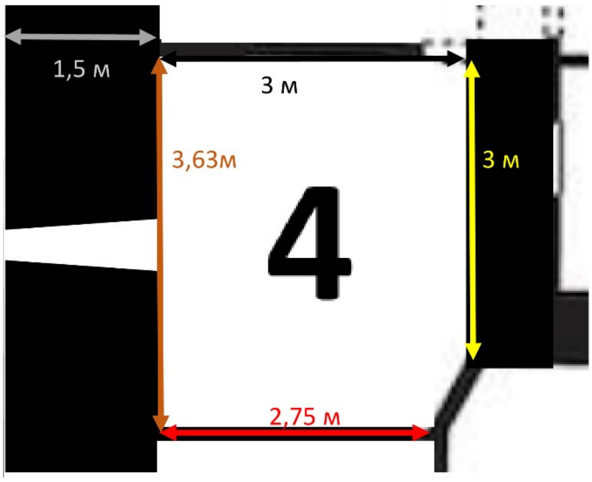
Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

6. Условие. В романе Александра Дюма «Граф Монте-Кристо» Эдмон Дантес четырнадцать лет просидел в одной темнице в Замке Иф (на схеме темница под номером 4) высотой 3 метра. В этой камере для света было только маленькое окошко-бойница, размером 70 см в высоту и 20 см в ширину, которое сужается к внешней части стены до высоты 30 см и ширины 10 см. Окно находится ровно посередине внешней стены под самым потолком, оно симметрично по ширине, верхняя грань окна строго горизонтальная. В определенный момент Эдмон, чтобы не сойти с ума, начал наблюдать за звездами из окна. Оцените, сколько всего звезд на небе мог наблюдать Эдмон из своей камеры. Дантес имел рост 180 см и был настолько истощен, что прыгать или подтягиваться он не мог. Толщина внешних стен Замка Иф 1.5 м. Считайте распределение звезд по небу равномерным, Эдмон Дантес может видеть звезды до 6^m. Широта Замка Иф – 43° с. ш. *(А. А. Автаева)*





6. Решение. На рисунке нам не даны размеры камеры, но в условии указана толщина наружной стены. Воспользуемся ей для определения масштаба рисунка и размеров камеры.-

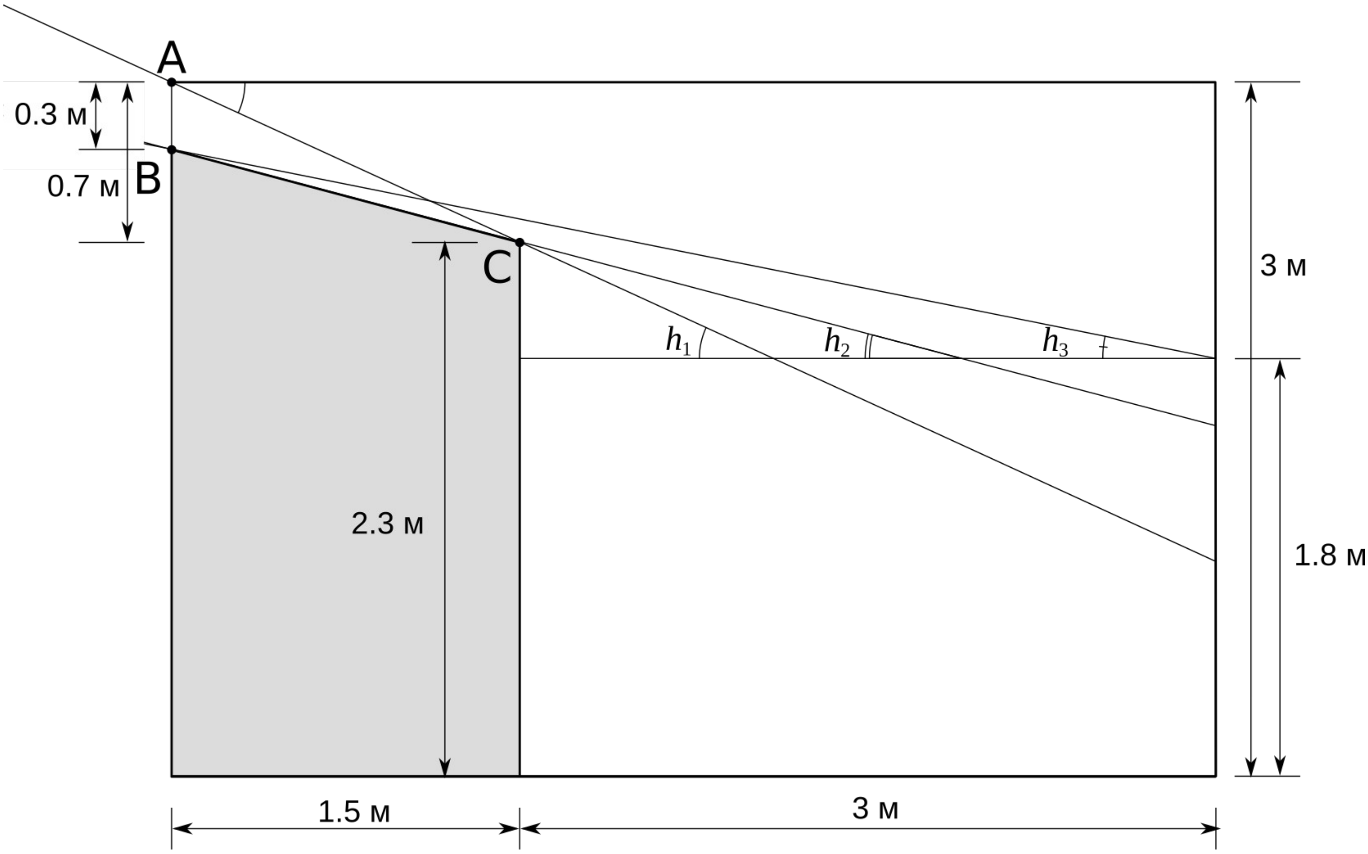


Найдем, на каких высотах Дантес мог видеть звезды в окошко. Так как нужна оценка, то пренебрежем разницей между положением макушки и глаз Дантеса. Не стоит забывать, что ходить по камере, а также садиться или ложиться на пол, ему никто не запрещал.

Максимально возможная высота h_1 соответствует тому случаю, когда луч зрения проходит через нижний край оконного проема на внутренней стороне стены (точка C) и верхний край на внешней стороне (точка A). Из рисунка

$$h_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{0.7}{1.5}\right) = 25°,$$

Можем убедиться, что Дантес вообще видел звезды из окна. Для этого ему необходимо было располагаться на расстоянии $l_1 = (2.3 - 1.8)/\mathrm{tg}\, h_1 = 0.5/(0.7/1.5) \approx 1$ м, что меньше 3 метров до противоположной стены.



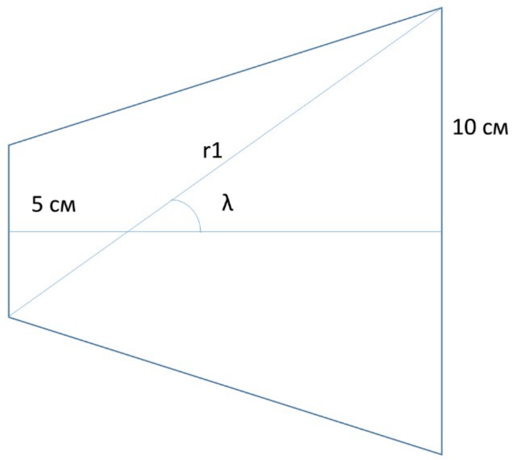
Стоя у дальней от окна стены Эдмон мог видеть звезды на минимальной высоте. Для того, чтобы определить эту высоту, необходимо выяснить, верхняя оконечность какой части стены, внутренней или наружной, закрывала ему обзор. Для этого определим, на каком расстоянии от окна луч BC, проходящий вдоль нижней границы окна, может попасть в глаз узника:

$$l_2 = (2.3 - 1.8)/\mathrm{tg}\, h_2 = 0.5 \cdot 1.5 / 0.4 \approx 1.9\ \text{м}.$$

Это расстояние меньше 3 метров, а значит нижняя часть поля зрения ограничена нижней границей внешней части оконного проема B. Тогда минимальная высота объектов, доступных для наблюдения, равна

$$h_3 = \mathrm{arctg}\left(\frac{0.4 + 0.5}{1.5 + 3}\right) \approx 11.3°.$$

В принципе, Дантес мог смотреть не только на звезды на меридиане, но и немного вбок. Оценим доступные для его обзора азимуты: λ = arctg (15 / 150) = 5.7°. Это очень небольшая величина. Внешняя сторона камеры 4, как и окно, выходит ровно на юг, поэтому считаем, что все, что наблюдается, находится вблизи верхней кульминации, так как замок Иф находится в северном полушарии Земли. Вблизи меридиана круги склонения примерно параллельны горизонту, хотя и постепенно опускаются вниз. Взгляд «сбоку» через окно уменьшает как максимально возможную, так и минимально возможную высоты наблюдения, но эти изменения столь незначительны, что ими можно пренебречь.



Теперь найдем склонения звезд, доступных для наблюдения. Небесный экватор находится на высоте $h_0 = 90° - \varphi = 47°$. Склонения звезд в верхней кульминации можно определить с помощью формулы

$$\delta = h + \varphi - 90°.$$

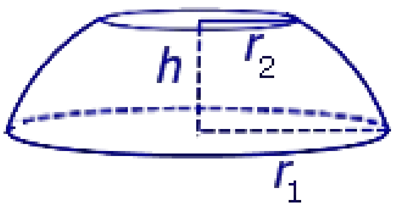
Следовательно, на максимальной высоте h_1 Дантес мог видеть звезды со склонениями

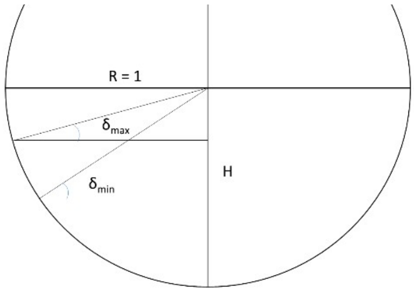
$$\delta_{max} = h_1 + \varphi - 90° = -22°,$$

а на минимальной высоте h_3 – звезды со склонениями

$$\delta_{min} = h_3 + \varphi - 90° = -35.7°.$$

В результате Дантес видел звезды в полосе небесной сферы, ограниченной склонениями δ_{min} и δ_{max}.





Площадь сферического пояса можно вычислить с помощью формулы $S = 2\pi RH$, где R – радиус сферы, H – высота сферического пояса. Высоту пояса можно выразить как $H = R \sin \delta$. Видимая Дантесом полоса является разностью двух сферических поясов, ограниченных склонениями δ_{min} и δ_{max}. Площадь этой полосы получается равной

$$S = 2\pi R^2 \cdot (\sin\delta_{max} - \sin\delta_{min}),$$

что в долях площади небесной сферы составит

$$R = \frac{2\pi R^2 (\sin\delta_{max} - \sin\delta_{min})}{4\pi R^2} \approx 0.1045.$$

На всем небе около 6000 звезд ярче 6^m, поэтому

$$N = 6000 \cdot 0.1045 \approx 627 \text{ звезд.}$$

6. Система оценивания.

Этап 1. (1 балла): Направления окна на юг, значит все видимые звезды вблизи верхней кульминации.

Этап 2. (1 балл): Нахождение параметров камеры (самое важное это длинна пола в направлении юг-север, остальные можно не искать).

Этап 3. (1 балл): Определение направления хода луча от звезды с минимальной высотой. Если участник не рассматривает этот вопрос вовсе, балл не выставляется, даже если он правильно решает задачу. Если участник приходит к выводу, что минимальная высота определяется углом h_2, то не выставляется балл как за этот, так и за последний пункты.

Этап 4. (1 балл): Нахождение минимальной угловой высоты, которую можно увидеть из окна камеры.

Этап 5. (1 балл): Нахождение максимальной угловой высоты, которую можно увидеть из окна камеры.

Этап 6. (1 балл): Нахождение минимального склонения, которое можно увидеть из окна.

Этап 7. (1 балл): Нахождение максимального склонения, которое можно увидеть из окна.

Этап 8. (1 балл): Нахождение максимального смещения по азимуту, и/или вывод, что смещение по азимуту не меняют полосу на небе, которую можно увидеть из окна. Если участник приходит к выводу, что смещение луча зрения по азимуту заметно изменяет число видимых звезд (больше 2 звезд), то не выставляется балл как за этот, так и за последний пункты.

Этап 9. (1 балл): Нахождение площади области на небесной сфере, которую можно увидеть из окна за все время (сферический пояс) – может быть представлено только формулой и неявно, или сразу подставлено в итоговую формулу нахождения количества звезд. Участники могут ошибиться, использовав формулу для сферического пояса и подставив в нее синус разности склонений вместо разности синусов. В таком случае оценка за этот пункт не выставляется, но последний пункт при правильном ответе (710 звезд) оценивается в полной мере. Так же стоит поступать при разумных, пускай и неправильных, оценках площади поверхности полосы.

Этап 10. (1 балл): Нахождение количества звезд, которое можно увидеть из окна.

<u>Возможные ошибки:</u>

- Взято неправильное значение количества звезд на всем небе, за пункт 9, ставится 0 баллов (количество звезд ярче 6^m должно быть взято в районе 6000 звезд)
- Любая логическая или вычислительная ошибка, приводящая к неправильному значению граничных высот наблюдения или склонений при водит к занулению не только того пункта системы оценивания, к которому она относится, но и последнего пункта, если выше не сказано иное.

Максимальная оценка за задачу – 10 баллов.

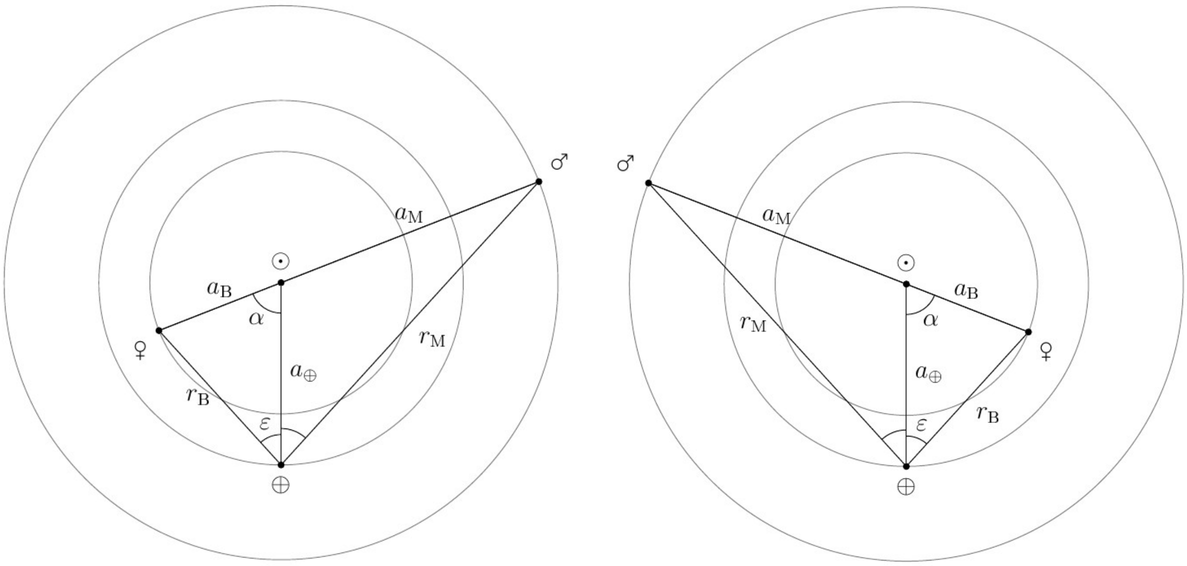
XXX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Региональный этап. Задания и решения

11 класс

1. Условие. Земной наблюдатель видит, что угловое удаление Венеры и Марса от Солнца одинаково и больше нуля. В тот же момент на Марсе можно наблюдать верхнее соединение Венеры с Солнцем. Определите угловое удаление Венеры от Солнца для земного наблюдателя. Орбиты всех планет считать круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. Определите минимально возможное время, за которое одна из планет окажется на одной линии с Солнцем для земного наблюдателя. Рассмотрите все возможные варианты и конфигурации. Сопроводите решение подробным чертежом. *(В. Б. Игнатьев)*

1. Решение. Изобразим на рисунке положение планет.



Заметим, что отрезок Земля–Солнце – биссектриса треугольника. Свойство биссектрисы – делить противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон. Это значит, что

$$\frac{r_{\rm B}}{r_{\rm M}}=\frac{a_{\rm B}}{a_{\rm M}}=\frac{0.72}{1.52}.$$

Запишем теорему косинусов для сторон Земля–Венера и Земля–Марс. Угол Земля–Солнце–Венера обозначим за α:

$$r_{\rm B}^2=a_\oplus^2+a_{\rm B}^2-2\,a_\oplus a_{\rm B}\cos\alpha,$$

$$r_{\rm M}^2=a_\oplus^2+a_{\rm M}^2-2\,a_\oplus a_{\rm M}\cos(180-\alpha)=a_\oplus^2+a_{\rm M}^2+2\,a_\oplus a_{\rm M}\cos\alpha.$$

Здесь мы учли, что cos (180° − α) = −cos α. Поделим одно уравнение на другое:

$$\left(\frac{r_{\rm B}}{r_{\rm M}}\right)^2=\left(\frac{a_{\rm B}}{a_{\rm M}}\right)^2=\frac{a_\oplus^2+a_{\rm B}^2-2\,a_\oplus a_{\rm B}\cos\alpha}{a_\oplus^2+a_{\rm M}^2+2\,a_\oplus a_{\rm B}\cos\alpha}.$$

Нам неизвестна только одна величина – cos α. Решим уравнение относительно нее. Тогда

$$\cos\alpha=0.366\quad\Rightarrow\quad\alpha=68.5°.$$

По теореме косинусов находим сторону $r_{\rm B}$:

$$r_{\rm B}\approx 1 \text{ а. е.}$$

Теперь по теореме синусов легко находится угол Венера-Земля-Солнце:

$$\frac{r_\text{В}}{\sin\alpha}=\frac{a_\text{В}}{\sin\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \sin\varepsilon=\sin\alpha\,\frac{a_\text{В}}{r_\text{В}},$$

откуда ε = 42° – угловое удаление Венеры от Солнца.

Для того, чтобы правильно ответить на второй вопрос задачи, обратим внимание, что условию задачи удовлетворяют два варианта взаимного расположения планет. В одном Венера находится к востоку от Солнца, а Марс – к западу, а в другом – наоборот. Перейдем в такую систему отсчета, в которой и Солнце, и Земля неподвижны. В этой системе координат планеты будут совершать один оборот по своей орбите за синодический период, причем Венера будет двигаться против часовой стрелки, а Марс – по часовой.

К этому выводу легко прийти, воспользовавшись угловыми скоростями. Если $T_\oplus$ и $T_\text{планеты}$ – сидерические периоды Земли и планеты, то разность угловых скоростей Земли и планеты составит их относительную угловую скорость:

$$\left|\frac{360°}{T_\oplus}-\frac{360°}{T_\text{планеты}}\right|=\left|\omega_\oplus-\omega_\text{планеты}\right|=\omega_\text{отн}=\frac{360°}{S_\text{планеты}}.$$

Здесь относительной угловой скорости поставлено в соответствие время S, которое и является синодическим периодом. Направление движения планеты определяется знаком выражения под модулем. Величины синодических периодов для Венеры и Марса равны 584 и 780 суток соответственно.

Рассмотрим вариант, изображенный на левом рисунке. Венере до нижнего соединения остается пройти угол α, тогда как Марсу до противостояния нужно пройти угол 180° − α. Синодический период Марса больше и больше путь, который ему надо пройти, поэтому, очевидно, что время до соединения Венеры пройдет меньше:

$$t_{1,\,\text{В}}=\alpha\cdot\frac{S_\text{В}}{360°}\approx 111\,\text{сут},\qquad t_{1,\,\text{М}}=\left(180°-\alpha\right)\cdot\frac{S_\text{М}}{360°}\approx 242\,\text{сут}.$$

Теперь обратимся к правому рисунку. В этом варианте Марсу остается пройти угол α до соединения, тогда как Венере потребуется пройти угол 180° − α, отделяющий ее от верхнего соединения. Для этого им потребуется

$$t_{2,\,\text{В}}=\left(180°-\alpha\right)\cdot\frac{S_\text{В}}{360°}\approx 181\,\text{сут},\qquad t_{2,\,\text{М}}=\alpha\cdot\frac{S_\text{М}}{360°}\approx 148\,\text{сут}.$$

В этом случае уже Марс оказывается быстрее на одной линии с Солнцем, однако искомое минимальное время получается именно в первом варианте: 111 суток.

1. Система оценивания.

Этап 1. (3 балла): Определение взаимного расположения планет и определение углового удаления Венеры от Солнца. 1 балл ставится за рисунок/схему или подробное описание конфигурации. Для этого этапа достаточно рассмотреть один из двух вариантов расположения планет. Оставшиеся 2 балла в этом пункте ставятся за верное нахождение величины углового удаления Венеры от Солнца. Принимаемая точность – 1 градус.

Возможная ошибка. Участник сразу предполагает, что Венера находится в максимальной элонгации. В этом случае, данный этап оценивается в 0 баллов. Второй этап оценивается независимо от первого и, если согласно модели участника, он решен верно, оценивается из стоимости второго этапа.

Возможная ошибка. Участник не увидел в условии, что Венера находится в верхнем соединении для наблюдателя на Марсе или перепутал верхнее и нижнее соединение. В этом случае участник начинает решать полностью свою задачу, и такое решение (все этапы) оценивается 0 баллов.

Этап 2. (5 баллов): Определение времен, когда каждая из планет окажется на линии Солнце-Земля и вывод о том, что Венера может сделать это раньше. По одному баллу выставляется за верное определение времени до соединения планеты с Солнцем. Участник может не считать время до противостояния Марса, но тогда должен явно сделать вывод, что оно больше, чем время до нижнего соединения Венеры. Последний балл выставляется за верный вывод о том, из всех возможных вариантов наименьшее время 111 дней затратит Венера.

Возможная ошибка. Участник рассматривает только один из двух вариантов расположения планет. При правильном решении он получает за второй этап 2 балла за определение времен до соединения: по 1 баллу за каждую планету.

Возможная ошибка. Использование сидерического периода планеты, вместо синодического периода. В этом случае весь этап оценивается 0 баллов.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Условие. Повторная новая RS Змееносца в 2021 году наблюдалась во всех спектральных диапазонах, в том числе и в гамма-диапазоне. В первые 2 дня поток фотонов от новой составлял $2.4 \cdot 10^{-6}$ фотонов·с$^{-1}$·см$^{-2}$ для фотонов с энергией 100 МэВ. Определите светимость от повторной новой для фотонов с такой энергией, если расстояние до объекта 1.6 кпк. Определите светимость в оптическом диапазоне, если в максимуме блеска видимая звездная величина составляла 4.8^m. Сравните со светимостью на 100 МэВ. Межзвездным поглощением и поглощением в атмосфере Земли пренебречь. Поток солнечной энергии на Земле в видимом диапазоне равен 600 Вт/м^2. Абсолютная звездная величина Солнца в видимом диапазоне равна 4.79^m. *(В. Б. Игнатьев)*

3. Решение. Для начала определим поток энергии F в гамма-диапазоне. Каждый фотон несет энергию 100 МэВ. МэВ – это миллион электрон-вольт. Из названия этой единицы измерения энергии понятно, что это работа необходимая для перемещение элементарного заряда в потенциале 1 вольт, то есть 1 эВ = $1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Тогда поток энергии в гамма-диапазоне от повторной новой будет равен

$$F = 2.4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{6} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} = 3.84 \cdot 10^{-17}\,\text{Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Найдем светимость в гамма-диапазоне:

$$L_\gamma = F \cdot 4\pi r_0^2 = 3.84 \cdot 10^{-17} \cdot 4\pi \left(1600 \cdot 3.1 \cdot 10^{18}\right)^2 = 1.2 \cdot 10^{28}\,\text{Вт}.$$

Следующим шагом определим оптическую светимость. Выразим абсолютную звездную величину в оптическом диапазоне:

$$M = m + 5 - 5\lg r_0 = 4.8^{\mathrm{m}} + 5 - 5\lg 1600 = -6.22^{\mathrm{m}}.$$

Сравнивая полученную абсолютную звездную величину с Солнцем:

$$\frac{L_{\mathrm{opt}}}{L_{\odot}} = 10^{-0.4(M - M_{\odot})}.$$

Важным моментом решения является определение оптической светимости Солнца. В справочных данных дана светимость $3.88 \cdot 10^{26}$ Вт, но это болометрическая светимость, то есть излучаемая во всем электромагнитном диапазоне энергия. Нам же для сравнения нужна светимость Солнца именно в оптическом диапазоне. Обратим внимание, что в условии задачи дан поток солнечной энергии в видимом диапазоне. В справочных данных есть солнечная постоянная (1360 Вт / м^2), т. е. поток всей солнечной энергии через единичную площадку на орбите Земли. Отношение этих потоков дает нам долю энергии в спектре Солнца, которая приходится на оптический диапазон. Подставим значения и получим светимость от повторной новой для оптического диапазона.

$$L = 10^{-0.4(-6.22 - 4.79)} \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \frac{600}{1360} = 4.3 \cdot 10^{30}\ \text{Вт.}$$

Светимость в оптическом диапазоне оказалась более чем в 300 раз выше, чем на 100 МэВ.

3. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Определение потока энергии в гамма-диапазоне от повторной новой RS Змееносца. Переход от внесистемных единиц измерения энергии к джоулям.

Этап 2. (2 балла): Определение гамма-светимости новой. Переход от потока энергии на Земле к светимости. Данный пункт оценивается в 2 балла.

Этап 3. (3 балла): Определение оптической светимости повторной новой. Данный этап разбивается на определение абсолютной звездной величины звезды по известной видимой и расстоянию до нее. Оценивается в 1 балл. Определение оптической светимости Солнца в явном виде или в виде отношения потоков оценивается в 1 балл. Определение оптической светимости новой, что оценивается в 1 балл.

Для определения светимости Солнца в оптическом диапазоне участник может взять интеграл от функции Планка в пределах видимого диапазона, от 360 нм до 740 нм. Если это сделано правильно, то оценивается в полной мере.

Этап 4. (1 балл): Вывод о том, в каком диапазоне светимость больше. Балл выставляется только при правильном вычислении обеих светимостей.

<u>Возможная ошибка.</u> Участник берет всю светимость Солнца и утверждает, что она вся оптическая. В этом случае за 3 этап участник получает только 1 балл.

<u>Возможная ошибка.</u> Участник неверно ищет долю оптической светимости Солнца. Скорее всего это происходит из-за невнимательного чтения условия. Этап 3 такого решения оценивается в 2 балла. Ниже примеры таких ошибок.

Вариант 1. Поток энергии в оптическом диапазоне составляет 600 / 1360 = 0.44 светимости Солнца, а значит абсолютная звездная в видимом диапазоне равна $M_{\text{в}1} = M - 2.5\lg 0.44 = 5.6^{\mathrm{m}}$.

Вариант 2. Болометрическая поправка для звезд класса G2 составляет −0.07. Отсюда, светимость Солнца в оптическом диапазоне составляет $10^{-0.4 \cdot 0.07} \approx 0.94$ полной светимости Солнца.

Это неверно, так как не учтена разница «нуль-пунктов» визуальной и болометрической шкал звездных величин.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

4. Условие. В далекой звездной системе по круговой орбите вокруг звезды главной последовательности массой 1.5 $M_\odot$ обращается планета – копия Земли по размерам. Сходство дополняется тем, что планета получает от звезды ровно столько же энергии, сколько Земля получает от Солнца. Вокруг планеты обращается спутник–копия Луны по размерам, только наклон орбиты спутника равен 0^o, а период обращения составляет 50 земных суток. Определите период смены фаз спутника для наблюдателя на планете. *(А. В. Веселова)*

4. Решение. Для определения периода смены фаз спутника нам нужно определить период обращения планеты вокруг звезды, а для этого требуется знать радиус орбиты r планеты. Эту величину мы найдем из равенства освещенностей, создаваемых звездой на планете и Солнцем на Земле:

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2}=\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}$$

Для звезд главной последовательности с массами близ солнечной справедлива пропорциональность $L \sim M^4$, отсюда

$$\frac{M^4}{4\pi r^2}=\frac{M_\odot^4}{4\pi a_\oplus^2}, \quad r=a_\oplus\cdot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2=2.25\,\text{а.е.}$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}.$$

В системе единиц «год – а. е. – масса Солнца»

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{1}{M}.$$

Отсюда

$$T=\sqrt{\frac{r^3}{M}}=\sqrt{\frac{2.25^3}{1.5}}=2.76\,\text{г.}$$

Спутник обращается в той же плоскости, что и планета, с периодом T_s = 50 суток. Наклон орбиты равен нулю, это означает, что спутник и планета движутся по орбитам в одном направлении. Период смены фаз – синодический период S спутника – связан с относительным движением спутника и планеты:

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{T_s}-\frac{1}{T}, \quad S=\frac{T\,T_s}{T-T_s}=\frac{2.76\cdot365.25\cdot50}{2.76\cdot365.25-50}=52.6\,\text{сут}.$$

4. Система оценивания.

Этап 1. (4 балла): запись условия о равенстве освещенностей (1 балл), применение соотношения «масса–светимость» (2 балла), получение радиуса орбиты планеты в а. е. или других подходящих по размерности единицах (1 балл). Показатель степени в соотношении может быть принят равным любой величине в диапазоне от 3 до 4. Отличия ответов в последующих пунктах, связанные с выбранным показателем, не являются ошибкой. Так, при показателе степени 3 значение радиуса орбиты будет равно 1.8 а. е., период обращения – 2 года, синодический период составит около 53.7 сут.

Этап 2. (2 балла): запись третьего закона Кеплера (1 балл) и определение периода обращения планеты в годах или других подходящих по размерности единицах (1 балл). Переход к системе «год – а. е. – масса Солнца» необязателен.

Этап 3. (2 балла): запись соотношения для синодического и сидерического периодов (1 балл), получение синодического периода в сутках или других подходящих по размерности единицах (1 балл). Использование величины тропического года Земли вместо звездного года дает незначительное изменение и ошибкой не считается.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

5. См. задание 5 для 10 класса

6. См. задание 6 для 10 класса